1.0 Einleitung

Eine Divisionsalgebra ist ein Vektorraum mit einer Multiplikation, die Nullteiler frei ist. Man betrachtet normalerweise reelle Vektorräume. Da man die Basiselemente des Vektorraums miteinander multiplizieren kann, wird dadurch die Multiplikation aller Vektoren fortgesetzt. Hat man folgende Vereinbarung: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1$ *und* $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ *, so erhält man den Körper der Komplexen Zahlen. Normalerweise schreibt man als Basis:* $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$ *und* $e_2 = i$ *und man erhält die bekannte Relation* $i^2 = -1$ *für die Komplexen Zahlen.*

Allgemein kann man für jede endliche Gruppe G den dazugehörigen freien Vektorraum über irgendeinen Körper K betrachten und darin die Gruppenelemente als Basisvektoren definieren. Dann hat man über die Gruppenmultiplikation ebenfalls eine Multiplikation auf dem freien Vektorraum definiert. Dies liefert eine Algebra, die eine sehr exotische Multiplikation haben kann, wie z.B. die Permutationsgruppe S_n *zeigt.*

Eine Divisionsalgebra muss nicht kommutativ sein, wie das Beispiel der Quaternionen zeigt. Die Basiselemente der Quaternionen bezeichnet man mit i, j, k, die gemäß den Hamilton-Regeln wie folgt miteinander in Beziehung stehen:

$$\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$

Es handelt sich hier um einen vierdimensionalen Vektorraum. Darüber hinaus gibt es einen achtdimensionalen Vektorraum – die Caleyzahlen – die ebenfalls eine Divisionsalgebra bilden.

Es stellt sich nun die Frage, ob es auch weitere höher dimensionale reelle Vektorräume geben kann, die eine Divisionsalgebra bilden. Die Antwort darauf ist ***Nein!***

Gelöst wurde dieses Problem durch den Mathematiker Adams[1] *mittels K-Theorie. Dabei spielt eine wichtige Abbildung eine Rolle, die von Hopf*[2] *entdeckt wurde.*

Der Aufsatz behandelt die Hopfabbildung und die wichtigen Implikationen für die Divisionsalgebren.

---

1 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/John_Frank_Adams

2 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Heinz_Hopf

1.1 Die Hopf Faserung

Die von Hopf definierte Abbildung

$$H_2 : S^3 \rightarrow S^2$$

kann unter Verwendung der komplexen Koordinaten wie folgt definiert werden:

$$H_2 : S^3 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 | \; |a|^2 + |b|^2 = 1\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$$
$$(a,b) \rightarrow b \cdot a^{-1}$$

$$P : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$$
$$z \rightarrow \left(\frac{2(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = \left(\frac{2 \cdot x}{|z|^2+1}, \frac{2 \cdot y}{|z|^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) mit\; z = x + iy$$

P ist die stereographische Projektion oder die Riemannsche Zahlenkugel: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

$$H_2(x+iy, z+it) = \frac{z+it}{x+it} = \frac{xz+yt+i \cdot (xt-yz)}{x^2+y^2}$$
$$u = \frac{xz+yt}{x^2+y^2}$$
$$v = \frac{yz-xt}{x^2+y^2}$$
$$u^2+v^2 = \frac{(x^2+y^2) \cdot (z^2+t^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{z^2+t^2}{x^2+y^2}$$
$$u^2+v^2+1 = \frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$
$$u^2+v^2-1 = \frac{z^2+t^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}$$
$$P : u \rightarrow \frac{2u}{u^2+v^2+1} = \frac{(x^2+y^2) \cdot 2 \cdot (xz+yt)}{x^2+y^2} = 2 \cdot (xz+yt)$$
$$P : v \rightarrow \frac{2v}{u^2+v^2+1} = \frac{(x^2+y^2) \cdot 2 \cdot (xt-yz)}{x^2+y^2} = 2 \cdot (xt-yz)$$
$$w = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} = z^2+t^2-x^2-y^2$$

Dies liefert die reelle Definition der Hopf Abbildung:

$$\widehat{H}_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z,t) \rightarrow (2(xz+yt), 2(xt-yz), z^2+t^2-x^2-y^2)$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&H_2(a,b)=b\cdot a^{-1}\Rightarrow H_2(a,k\cdot a)=k \textit{ für } k\in\mathbb{C} \textit{ und } (a,ka)\in S^3\\
&\Rightarrow x^2+y^2+|k|^2\cdot(x^2+y^2)=1 \textit{ für } a=x+iy\\
&\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{1+|k|^2}
\end{aligned}
$$

Die Urbilder der Hopf Abbildung sind Kreise.

$$H_2: S^1\rightarrow S^3\rightarrow S^2$$

Die Hopf Abbildung besitzt darüber hinaus die Homotopie-Hochhebungseigenschaft für jeden topologischen Raum A:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & S^3\simeq\{(a,b)\in\mathbb{C}^2 \mid |a|^2+|b|^2=1\} \arrow[d, "H_2"] \\
AxI \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "F"] & S^2\simeq\mathbb{C}\cup\{\infty\}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&g(a)=(p_1(g(a)),p_2(g(a)))\\
&H_2(g(a))=\frac{p_2(g(a))}{p_1(g(a))}=f(a,0)\\
&F(a,t)=(\frac{p_1(g(a))^2}{p_2(g(a))}f(a,t),\frac{p_1(g(a))^2}{p_2(g(a))}\cdot[f(a,t)]^2)
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Wendet man auf die Hopf Faserung die lange exakte Homotopiesequenz von Faserungen an, so folgt:

$$\rightarrow\pi_3(s^1)\rightarrow\pi_3(s^3)\rightarrow\pi_3(s^2)\rightarrow\pi_2(s^1)\rightarrow$$

$$0\rightarrow\pi_3(s^3)\rightarrow\pi_3(s^2)\rightarrow 0$$

$$\pi_3(s^3)\simeq\pi_3(s^2)$$

$$\pi_3(s^3)\simeq\mathbb{Z}\Rightarrow\pi_3(s^2)\simeq\mathbb{Z}$$

Anmerkung: Die Konstruktion der Hopf Faserung ist immer möglich, wenn X eine Divisionsalgebra ist.

$$H_2 : S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2 \, für \, die \, komplexen \, Zahlen$$
$$H_4 : S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4 \, für \, die \, Quaternionen$$
$$H_8 : S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8 \, für \, die \, Oktaven$$

Das letzte Kapitel soll aufzeigen, warum es nur diese Divisionsalgebren gibt.

1.2 Beweis des Satzes über Divisionsalgebren

1.2.1 Die Hopf Konstruktion

Ist $(x_1, \ldots, x_{p+1}, y_1, \ldots, y_{q+1})$ ein Element von S^{p+q+1}, dann gilt: $\|x\|^2+\|y\|^2=1$. Ist $\|x\|\leq\frac{1}{2}$, dann ist $(2\cdot x,\frac{y}{\|y\|})\in e^{p+1}\times S^q$. Ist $\|x\|\geq\frac{1}{2}$, dann ist $(\frac{x}{\|x\|},\frac{\sqrt{(1-\|x\|^2)}\cdot 2}{\sqrt{3}}\cdot y)\in S^p\times e^{q+1}$. Dies liefert einen Homöomorphismus :

$$\Psi:S^{p+q+1}\rightarrow e^{p+1}\times S^q\cup S^p\times e^{q+1}:(x,y)\rightarrow\begin{cases}(2\cdot x,\frac{y}{\|y\|}) & \mathit{für}\,\|x\|\leq\frac{1}{2}\\ (\frac{x}{\|x\|},\frac{\sqrt{(1-\|x\|^2)}\cdot 2}{\sqrt{3}}\cdot y)\,\mathit{für}\,\|x\|\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ist $\mu:S^{n-1}\times S^{n-1}\rightarrow S^{n-1}$, dann kann man eine Abbildung $\tilde{\mu}:S^{2n-1}\rightarrow S^n$ wie folgt definieren, wenn man mit dem obigen Homöomorphismus $S^{2n-1}\simeq\delta e^n\times e^n\cup e^n\times\delta e^n$ als Rand $\delta(e^n\times e^n)$ und die S^n als Vereinigung zweier n-Zellen e^n_- bzw. e^n_+ betrachtet, die am Rand über die identische Abbildung miteinander zur S^n verklebt werden:

$$\tilde{\mu}(x,y)=\begin{cases}\|x\|\cdot\mu(\frac{x}{\|x\|},y)\in e^n_{-}\mathit{für}\,(x,y)\in e^n\times\delta e^n\\ \|y\|\cdot\mu(x,\frac{y}{\|y\|})\in e^n_{+}\mathit{für}\,(x,y)\in\delta e^n\times e^n\end{cases}$$

Die Abbildung ist stetig, auch wenn x = 0 oder y = 0 ist und stimmt auf $\delta e^n\times\delta e^n=S^{n-1}\times S^{n-1}$ mit µ überein.

Seien $i_1: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$ und $i_2: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}$ die Inklusionen in die linke bzw. rechte Sphäre des Kreuzproduktes. Dann ist $\mu\circ i_1: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ eine Selbstabbildung der S^{n-1} und hat damit einen Abbildungsgrad p. Ebenso verhält es sich mit $\mu\circ i_2: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Der Abbildungsgrad sei q. Man sagt, dass µ den Typ (p,q) hat, falls der Abbildungsgrad der eingeschränkten Abbildungen p bzw. q ist.

S^n heißt H-Raum, falls es eine Abbildung $\mu: S^n \times S^n \rightarrow S^n$ vom Typ (1,1) gibt.

Beispiele:
Ist S^n eine topologische Gruppe und μ(x,y) = xy, dann ist μ(x,1)=x und μ(1,x)=x. Damit ist μ vom Typ (1,1) und S^n ist ein H-Raum.

Ist umgekehrt S^n ein H-Raum, dann gibt es eine Abbildung $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ mit Hopf Invariante 1.

Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt parallelisierbar, falls es n linear unabhängige Vektorfelder $v_i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, die orthogonal zu x sind.

Ist S^n parallelisierbar, dann gibt es eine Abbildung μ: $S^n \times S^n \to S^n$ vom Type (1,1).
Dazu betrachtet man die Matrix $A(x) \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$, die aus den Spaltenvektoren $(x, v_1(x), \ldots, v_n(x))$ besteht, dann ist $A(x)(e_1) = x$ und $\frac{A(x)(e_1)}{\|A(x)(e_1)\|}$ in S^n. Wählt man $(e_1, v_1(e_1), \ldots, v_n(e_1))$ als Standardbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$, dann gilt darüber hinaus: $A(e_1)(x) = x$. Man hat:

$$\mu : S^n \times S^n \to S^n : \mu(x, y) = \frac{A(x)A(y)(e_1)}{\|A(x)A(y)(e_1)\|} \quad .$$

Für $y = e_1$ gilt: $\mu(x, e) = \frac{A(x)A(e_1)(e_1)}{\|A(x)A(e_1)(e_1)\|} = \frac{A(x)(e_1)}{\|A(x)(e_1)\|} = x$.

Für $x = e_1$ gilt: $\mu(e_1, y) = \frac{A(e_1)A(y)(e_1)}{\|A(e_1)A(y)(e_1)\|} = \frac{A(e_1)(y)}{\|A(e_1)(y)\|} = y$. S^n ist also ein H-Raum, wenn S^n parallelisierbar ist.

□

Ist $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Divisionsalgebra (Divisionsalgebren haben nicht notwendigerweise wie topologische Gruppen ein Eins-Element), so ist S^n ein H-Raum.

Die Projektion $p : \mathbb{R} - \{0\} \to S^n : x \to \frac{x}{\|x\|}$ ist eine Homotopieäquivalenz und linksinvers zu Einbettung: $i : S^n \to \mathbb{R} - \{0\} : x \to x$. Ist μ die Multiplikationsabbildung der Divisionsalgebra, so gibt es ein $\tilde{\mu} : S^n \times S^n \to S^n : (x, y) \to p \circ \mu(x, y)$ und es gilt:

$$\tilde{\mu} \circ i(x) = p \circ \mu(x, e) = x ; \tilde{\mu} \circ i(y) = p \circ \mu(e, y) = y$$

und $\tilde{\mu}$ ist die gewünschte Abbildung vom Typ (1,1)

1.2.2 Die Hopf Invariante in K-Theorie

1.2.2.1 Anmerkungen zur K-Theorie

Für einen kompakten Hausdorff Raum X ist K(X) ein Ring. Die Elemente in K(X) werden durch stabile Vektorraum-Bündel repräsentiert. Das sind stetige Abbildungen p: E → X (kurz als E bezeichnet), die als Faser $p^{-1}(\{x\})$ einen n-dimensionalen komplexen Vektorraum V haben. Zwei Vektorraumbündel E_1 und E_2 repräsentieren dasselbe Element in K(X), wenn es ein triviales Bündel $\varepsilon^n: X\times\mathbb{C}^n \rightarrow X$ gibt, sodass die beiden Bündel $E_1\oplus\varepsilon^n \simeq E_2\oplus\varepsilon^n$ äquivalent sind, d.h.: es gibt eine Abbildung $h: E_1\oplus\varepsilon^n \rightarrow E_2\oplus\varepsilon^n$, sodass h in jeder Faser des Bündels ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, d.h.: man verschafft sich zusätzliche Dimensionen, um die Vektorräume in der Faser isomorph ineinander abzubilden.
Die Summe in K(X) wird dann durch $E_1\oplus E_2$ repräsentiert und das Produkt in K(X) durch $E_1\otimes E_2$. K(X) ist bezüglich der Addition zuerst nur ein kommutativer Monoid, da $E_1\oplus E_2 \approx E_2\oplus E_1$ ist. Damit K(X) bezüglich der Addition eine Gruppe wird, verwendet man die *Grothendieck Konstruktion*. K(X) hat folgende grundlegenden Eigenschaften:

$(i)\ \ \mu: \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2\wedge X)\, \mu(\alpha) = (H-1)\cdot\alpha$ *ist ein Isomorphismus (Bott Periodizität) für alle kompakten Hausdorff Räume* X, *wobei* H *das kanonische Linienbündel über* $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ *ist.*

(ii) *Zu jedem Vektorraumbündel* $E \rightarrow X$ *– mit* X *kompakter Hausdorff Raum – existiert ein kompakter Hausdorff Raum* $F(E)$ *und eine Abbildung* $p: F(E) \rightarrow X$, *sodass* $p^{*}: K(X) \rightarrow K(F(E))$ *ein injektiver Ringhomomorphismus ist und* $p^{*}(E)$ *als Summe von Linienbündeln dargestellt werden kann:* $p^{*}(E) = L_1\oplus\ldots\oplus L_n$

(iii) *Ist* $A\in X$ *ein abgeschlossener Unterraum des kompakten Hausdorff Raumes* X, *dann liefert die Inklusion* $i: A \rightarrow X$ *zusammen mit der Projektion* $p: X \rightarrow X/A$ *eine exakte Sequenz* $\tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(A)$, *d.h.: Kern* $i^{*} =$ *Bild* p^{*}

Anmerkung:

- Die exakte Sequenz aus (iii) kann man über $A \rightarrow X \rightarrow X\cup CA \rightarrow (X\cup CA)\cup CX \rightarrow ((X\cup CA)\cup CX)\cup C(X\cup CA)$ erweitern. Da Abbildungskegel zusammenziehbar sind, gilt: $X\cup CA \approx X/A$, $(X\cup CA)\cup CX \approx SA$ und $((X\cup CA)\cup CX)\cup C(X\cup CA) \approx SX$. Man hat damit eine exakte Sequenz:

$$\ldots \rightarrow \tilde{K}(SX) \rightarrow \tilde{K}(SA) \rightarrow \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(A)\ .$$

- Aus der Bott Periodizität folgt: $\widetilde{K}(S^{2n-1})\approx\widetilde{K}(S^1)\,und\,\widetilde{K}(S^{2n})\approx\widetilde{K}(S^0)$ .Die Vektorraumbündel in $\widetilde{K}(S^0)$ sind $E_n=\{e\}\times\mathbb{C}^n$ mit der direkten Summe $E_n\oplus E_m\approx E_{n+m}$ als Addition und dem Tensorprodukt $E_n\otimes E_m\approx E_{n\cdot m}$ als Multiplikation. Damit hat man $K(S^{2n})\approx\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\Rightarrow\widetilde{K}(S^{2n})\approx\mathbb{Z}$.

- Jede Sphäre S^n lässt sich in die obere und untere Hemisphäre aufteilen, die S^{n-1} als gemeinsamen Rand haben. Die obere und untere Hemisphäre der S^n sind zusammenziehbar und haben deshalb triviale Vektorraumbündel $E_k\approx D^n\times\mathbb{C}^k$. Hat man eine Abbildung f, die durch $[f]\in\pi_{n-1}(GL_k(\mathbb{C}))$ gegeben ist, so kann man die k-dimensionalen Vektorräume auf dem gemeinsamen Rand der beiden Hemisphären über f identifizieren: $(x,v)\sim(x,f(v))\,für\,(x,v)\in S^{n-1}\times\mathbb{C}^k$. Man nennt f eine Verklebefunktion und das Vektorraumbündel E_f. Diese Zuordnung ist umkehrbar, sodass man eine bijektive Abbildung $\Psi:\pi_{n-1}(GL_k(\mathbb{C}))\leftarrow\rightarrow Vect^k(S^n)$ hat. Da $\pi_0(GL_k(\mathbb{C}))\leftarrow\rightarrow Vect^k(S^1)$ und $\pi_0(GL_k(\mathbb{C}))$ nur ein Element hat, sind alle Vektorraumbündel über S^1 trivial. Es folgt $\widetilde{K}(S^1)\approx\widetilde{K}(S^{2n-1})=0$ mit der Bott Periodizität.

1.2.2.2 Der zentrale Satz von Adams

<u>Theorem (J.F. Adams)</u>: Eine Abbildung $f:S^{4k-1}\rightarrow S^{2k}$ ***mit*** $k=1,2,4$ ***hat eine ungerade Hopf Invariante.***

<u>Folgerung:</u> Die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Oktaven sind die einzigen Divisionsalgebren.

Beweis über K-Theorie

C_f sei der Raum, der entsteht, wenn man eine e^{2n} Zelle über $\widetilde{\mu}:S^{2n-1}\rightarrow S^n$ mit der S^n verklebt. Die exakte Sequenz des Paares (C_f, S^n)

$$\widetilde{K}^{-1}(S^n)\rightarrow\widetilde{K}^0(C_f/S^n)\rightarrow\widetilde{K}^0(C_f)\rightarrow\widetilde{K}^0(S^n)\rightarrow\widetilde{K}^1(S^n)$$

liefert:

$$\widetilde{K}^{-1}(S^n)\rightarrow\widetilde{K}^0(S^{2n})\rightarrow\widetilde{K}^0(C_f)\rightarrow\widetilde{K}^0(S^n)\rightarrow\widetilde{K}^1(S^n)\quad .$$

Mit n = 2k hat man:

$$\widetilde{K}^{-1}(S^{2k}) \to \widetilde{K}^0(S^{4k}) \to \widetilde{K}^0(C_f) \to \widetilde{K}^0(S^{2k}) \to \widetilde{K}^1(S^{2k}) \quad .$$

Aber es ist

$$\widetilde{K}^{-1}(S^{2k}) = \widetilde{K}^1(S^{2k}) = K^0(S^{2k+1}) = 0$$

und damit ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \to \widetilde{K}^0(S^{4k}) \to \widetilde{K}^0(C_f) \to \widetilde{K}^0(S^{2k}) \to 0 \quad .$$

Sei α das Bild des Erzeugers von $\widetilde{K}^0(S^{4k})$ in $\widetilde{K}(C_f)$ und β ein Element in $\widetilde{K}(C_f)$, das auf den Erzeuger von $\widetilde{K}^0(S^{2k})$ abgebildet wird. Da β^2 auf 0 in $\widetilde{K}^0(S^{2k})$ abgebildet wird, gilt $\beta = n \cdot \alpha$. Leider ist β nicht eindeutig, da β+kα ebenfalls auf den Erzeuger in $\widetilde{K}^0(S^{2k})$ abgebildet wird. Es gilt aber $(\beta+k\alpha)^2 = \beta^2 + 2k\alpha$, da $\alpha^2 = 0$ ist. Reduziert man mod 2, dann ist $n \in \mathbb{Z}_2$ eindeutig festgelegt.

Zum Beweis des Satzes konstruiert man einen Ringhomomorphismus Ψ in $\widetilde{K}(X)$ (Adams Operationen) mit folgenden Eigenschaften[3]:

$$\begin{aligned}
&\Psi^k : \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(X)\\
&(i)\ \ \Psi^k f^{\ast} = f^{\ast} \Psi^k \textit{ für jede Abbildung } f : X \to Y\\
&(ii)\ \Psi(L) = L^k \textit{ falls } L \textit{ ein Linienbündel ist}\\
&(iii)\ \Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{kl}\\
&(iv)\ \Psi^p(\alpha) = \alpha^p + p \cdot \beta \equiv \alpha^p \bmod p
\end{aligned}$$

Satz: $\Psi^k : \widetilde{K}(S^{2n}) \to \widetilde{K}(S^{2n})$ *ist die Multiplikation mit k^n.*

Sei n=1, dann ist α = H-1, wobei H das kanonische Linienbündel über $S^2 = \mathbb{C}P^1$ ein Erzeuger von $\widetilde{K}(S^2) \simeq \mathbb{Z}[H] / (H-1)^2$ ist. Dann gilt:

$$\Psi^k(\alpha) = H^k - 1 = (1+\alpha)^k - 1 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^i - 1 = 1 + k \cdot \alpha - 1 = k \cdot \alpha \,, \textit{weil } \alpha^i = (H-1)^i = 0 \textit{ für } i > 1$$

---

3 Siehe Vector Bundles and K-Theorie, Allen Hatcher, Version 2.1, May 2009

Gilt der Satz für n, so folgt für n+1:

$$\widetilde{K}(S^2)\otimes\widetilde{K}(S^{2n})\simeq\widetilde{K}(S^{2n+2}):\Psi^k(\alpha\cdot\beta)=\Psi^k(\alpha)\otimes\Psi^k(\beta)=k\cdot\alpha\otimes k^n\cdot\beta=k^{n+1}\alpha\otimes\beta=k^{n+1}\alpha\cdot\beta$$

□

Es gilt also: $\Psi^k(\alpha)=k^{2n}\alpha$, weil α Bild des Erzeugers von $\widetilde{K}^0(S^{4n})$ ist. Darüber hinaus gilt wegen der Natürlichkeit: $p^{\star}\Psi^k(\beta)=\Psi^k p^{\star}(\beta)=\Psi^k(e)=k^n\cdot e$, wenn p die Projektion von C_f nach S^{2n} ist und e der Erzeuger von $\widetilde{K}(S^{2n})$. Daraus folgt: $\Psi^k(\beta)=k^n\beta+\mu_k\alpha$.

$$\Psi^k\Psi^l(\beta)=\Psi^k(l^n\cdot\beta+\mu_l\cdot\alpha)=l^n\cdot\Psi^k(\beta)+\mu_l\Psi^k(\alpha)$$
$$\Psi^k\Psi^l(\beta)=l^n\cdot(k^n\beta+\mu_k\alpha)+\mu_l k^{2n}\alpha=k^n l^n\beta+(k^{2n}\mu_l+l^n\mu_k)\alpha$$

Durch vertauschen von l und k erhält man:

$$\Psi^l\Psi^k(\beta)=\Psi^l(k^n\cdot\beta+\mu_k\cdot\alpha)=k^n\cdot\Psi^l(\beta)+\mu_k\Psi^l(\alpha)$$
$$\Psi^l\Psi^k(\beta)=k^n\cdot(l^n\beta+\mu_l\alpha)+\mu_k l^{2n}\alpha=k^n l^n\beta+(l^{2n}\mu_k+k^n\mu_l)\alpha$$

Da $\Psi^l\Psi^k=\Psi^k\Psi^l$ ist liefert das $(k^{2n}-k^n)\cdot\mu_l=(l^{2n}-l^n)\cdot\mu_k$. Für k=3 und l=2 erhält man die Relation: $(3^{2n}-3^n)\cdot\mu_2=(2^{2n}-2^n)\cdot\mu_3$.

Eigenschaft (iv) besagt, dass $\Psi^2(\beta)=2^n\beta+\mu_2\alpha\equiv\beta^2\equiv h\cdot\alpha\, mod\, 2$ ist, wobei h die mod 2 Hopf Invariante ist. Also ist μ_2 ungerade, wenn $h\equiv\pm1\, mod\, 2$ sein soll. Dies geht aber nur, wenn $(2^{2n}-2^n)|(3^{2n}-3^n)\Leftrightarrow 2^n\cdot(2^n-1)|3^n\cdot(3^n-1)\Leftrightarrow 2^n|(3^n-1)$ gilt. Dies ist aber nur für n=1, 2 oder 4 möglich.[4]

□

Der Beweis von Adams ist deshalb so schön, weil man mit den Adams Operationen entsprechende Funktoren bereitstellt, die ein Problem der Algebra (welche Divisionsalgebren gibt es) in ein Zahlentheoretisches Problem (wann teilt 2^n die Zahl 3^n -1) überführt. Diese Vorgehensweise wurde zum ersten Mal von Everiste Galois angewandt, der damit das Problem (Gleichungen wessen Grades sind durch Wurzeln auflösbar) in ein Problem der Gruppentheorie (für welche n ist die symmetrische Gruppe S_n auflösbar) überführte.

4 Siehe Vector Bundles and K-Theorie, Allen Hatcher, Version 2.1, May 2009, S. 65

1.3 Anmerkungen

1.3.1 Die Hopf Invariante über Kohomologie

$e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ ist die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$, die man auch n-Zelle nennt.

Der Rand δe^n ist die Sphäre S^{n-1}. Mit einer Abbildung $f: S^{n-1} \to X$ kann man eine n-Zelle an X anheften, in dem man die Punkte auf der S^{n-1} mit den Bildern f(x) in X identifiziert.

Man betrachtet für die Hopf Invariante Abbildungen $f: S^{2n-1} \to S^n$. Dann kann eine 2n-Zelle über h an die S^n angeheftet werden. Die S^n erhält man, indem eine n-Zelle über die konstante Abbildung k an einen ausgezeichneten Punkt e in der S^n (Basispunkt) angeheftet wird. Der so konstruierte Raum ist ein zellulärer Komplex

$$X = \{e\} \cup_k e^n \cup_f e^{2n}$$

dessen Kohomologie ein graduierter Ring mit den Erzeugern 1, α, β in den Dimensionen 0, n und 2n ist. Das Cup-Produkt von α, β muss Null sein, weil es Dimension 3n hat in der es keine Zelle gibt. Dasselbe gilt für das Cup-Produkt von β mit sich selbst, weil es Dimension 4n hat und keine Zelle in dieser Dimension existiert. Bleibt nur $\alpha^2 = m \cdot \beta, m \in \mathbb{Z}$ übrig. Die Zahl m heißt Hopf Invariante h(f) der Abbildung f.

1.3.2 Die Hopf Invariante über Homotopie

Allgemeines zur Homotopie

Sind X und Y topologische Räume, dann ist [X,Y] die Menge aller Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen f bzw. g:X→ Y. Die Abbildungen f,g sind äquivalent – geschrieben $f \simeq g$, wenn es eine stetige Abbildung $H: X \times I \to Y$ – I ist dabei das Einheitsintervall [0,1] – mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ gibt. Die Homotopieklasse einer Abbildung f bezeichnet man mit [f].
Damit eine bessere algebraische Struktur auf den Homotopieklassen definiert werden kann, betrachtet man Abbildungen, die einen Basispunkt von X – e_X – in einen Basispunkt von Y – e_Y – abbilden. Dies muss die Homotopie ebenfalls berücksichtigen, d.h.: $H(e_x, t) = e_y \, \text{für} \, t \in I = [0,1]$. Im Folgenden betrachten wir nur Abbildungen mit Basispunkt.

Will man auf den Homotopieklassen [X,Y] eine Rechenoperation haben, so muss man bestimmte Räume und Abbildungen betrachten, die dann die entsprechenden Eigenschaften der Operation garantieren. Dazu betrachtet man H- bzw. H'-Räume.

Ein topologischer Raum Y ist genau dann ein H-Raum, wenn es eine Abbildung $\mu : Y\times Y \rightarrow Y$ *gibt, sodass* $\mu\circ i_k = id_y$ *gilt, falls* i_k *die Inklusionen in den linken bzw. rechten Faktors von* $Y\times Y$ *sind.*

Sind f: X→ Y und g:X→ Y Abbildungen, die den Basispunkt erhalten, dann hat man die Diagonalenabbildung, die durch $\Delta : X \rightarrow X\times X : x \rightarrow (x, x)$ definiert ist. Sind f, g Repräsentanten von [f], [g] in [X,Y], dann repräsentiert die Abbildung, die durch $(f\cdot g)(x)=\mu\circ(f\times g)\circ\Delta(x)=\mu(f(x), g(x)) mit\, \Delta(x)=(x, x)$ gegeben ist, das Produkt der beiden Abbildungen f, g repräsentiert.

Man definiert für jeden topologischen Raum X einen neuen Raum $X\vee X$ durch $X\vee X=\{(x, e_x) und (e_x, x)\}\in X\times X\}$ – also die beiden Koordinatenachsen von $X\times X$. Ist k die Inklusion $X\vee X\subset X\times X$, dann hat man die Projektionen $q_i = p_i\circ k, i=1,2$, wobei die p_i die Projektionen des Kreuzproduktes $X\times X$ in den linken bzw. rechten Faktor sind.

X ist genau dann H'-Raum, wenn es eine Abbildung $\Phi : X \rightarrow X\vee X$ *gibt, sodass* $q_i\circ\Phi\simeq id_X, i=1,2$ *ist.*

Für jeden topologischen Raum Y, gibt es eine Faltungsabbildung, die wie folgt definiert ist: $\nabla : Y\wedge Y \rightarrow Y : \begin{Bmatrix} \nabla(y_{1,} e_Y)=y_1 \\ \nabla(e_Y, y_2)=y_2 \end{Bmatrix}$.

Sind f und g zwei Repräsentanten der Homotopieklassen [f], [g], dann wird durch die Komposition der Abbildungen: $\nabla\circ(f\vee g)\circ\Phi : X \rightarrow Y$ die Summe das Koprodukt der beiden Abbildungen f,g repräsentiert.

Man muss weitere Forderungen stellen, damit das Produkt oder das Koprodukt eine Gruppenstruktur auf [X,Y] zulassen. Momentan haben wir für beide Operationen nur eine Monoid Struktur definiert, wie das in der Menge $\mathbb{N}$ bezüglich der Addition der Fall ist.

Für die Gruppenstruktur fehlt noch die Assoziativität und die Existenz von Inversen. Die Assoziativität für H-Räume ist gegeben, wenn $\mu\circ(\mu\times id_Y)\simeq\mu\circ(1_Y\times\mu)$ gilt. Ebenso hat man die Assoziativität auf H'-Räumen, wenn $\Phi\circ(\Phi\vee id_X)\simeq\Phi\circ(1_X\vee\Phi)$ gilt.

Die Homotopieklasse der konstanten Abbildung auf X und Y ist nach der Definition des Produktes und des Koproduktes das neutrale Element in [X,Y].

Fordert man darüber hinaus, dass es für H-Räume und für H‘-Räume eine Abbildung j gibt, sodass die Abbildungen $\mu\circ(j\times id_Y)\circ\Delta\simeq\mu\circ(id_Y\times j)\circ\Delta$ für H-Räume bzw. $\nabla\circ(j\vee id_X)\circ\Phi\simeq\nabla\circ(id_X\vee j)\circ\Phi$ für H‘-Räume nullhomotop – also homotop zur konstanten Abbildung von X bzw. Y auf die Basispunkte e_X bzw. e_y – sind, dann haben $[id_Y]$ bzw. $[id_X]$ über [j] ein inverses Element und man kann darüber auf [X,Y] eine Gruppenstruktur definieren, wenn X ein H‘-Raum bzw. Y ein H-Raum ist.

Zu jedem topologischen Raum X kann man einen H-Raum konstruieren: $\Omega X=\{\omega:I\rightarrow X:\omega(0)=\omega(1)=e_x\}$ – den Raum aller Schleifen in X, die beim Basispunkt e_X starten und dort auch enden. Die H-Raum Struktur ist durch die natürliche Multiplikation der Schleifen gegeben:

$$\omega_1\cdot\omega_2(t)=\left\{\begin{matrix}\omega_1(2\cdot t)\mathit{für}\ 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \omega_2(2-2\cdot t)\mathit{für}\frac{1}{2}\le t\le 1\end{matrix}\right\} \quad .$$

Ist S^1 die Einheitssphäre in $\mathbb{C}$ gegeben durch die Homotopieäquivalenz $\Psi:I/\delta I\rightarrow S^1:t\rightarrow e^{2\cdot\pi\cdot t}$, dann ist durch $\Phi:S^1\rightarrow S^1\vee S^1:\left\{\begin{matrix}e^{2\pi\cdot 2\cdot t}\mathit{für}\ 0\le t\le\frac{1}{2}\\ e^{2\pi\cdot 2\cdot(2t-1)}\mathit{für}\ \frac{1}{2}\le t\le 1\end{matrix}\right\}$ ein Koprodukt auf S^1 gegeben. Sind X und Y topologische Räume, so bezeichnet man den Raum $X\times Y/X\vee Y=X\wedge Y$ als Smash-Produkt der beiden Räume X und Y. Ist X ein H‘-Raum, dann ist $X\wedge Y$ ein H‘-Raum[5] für alle topologischen Räume Y. Also hat man für jeden topologischen Raum X über die reduzierte Einhängung $S^1\wedge X$ eine H‘-Raum konstruiert, weil S^1 ein H‘-Raum ist.

Da $S^n\simeq S^1\wedge\ldots\wedge S^1$ ist, ist $\pi_n(X):\{[f]:f:S^n\rightarrow X\}$ eine Gruppe, die n-te Homotopiegruppe eines topologischen Raumes X. Ist A ein Unterraum von X so kann man über $[(e^n,S^{n-1}),(X,A)]$ relative Homotopiegruppen $\pi_n(X,A)$ des Paares (X,A) definieren. Die Inklusionen $i:(A,e_X)\rightarrow X; j:(X,e_x)\rightarrow(X,A)$ zusammen mit der Restriktion, die man für jede Abbildung $f:(e^n,S^{n-1})\rightarrow(X,A)$ über $\delta([f])=[f|S^{n-1}]$ hat, liefern dann die lange exakte Homotopiesequenz $..\rightarrow\pi_n(A)\rightarrow\pi_n(X)\rightarrow\pi_n(X,A)\rightarrow\pi_{n-1}(A)\rightarrow\ldots$.

5 Siehe George W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, 1978 Springer New York, S. 123

Das Whitehead Produkt

Das Whitehead Produkt $[\alpha,\beta]\in S^{p+q+1}(X)$ zweier Abbildungen $\alpha\in\pi_{p+1}(X),\beta\in\pi_{q+1}(X)$ ist auf dem Rand des Kreuzprodukts der beiden Zellen e^{p+1} bzw. e^{q+1} wie folgt definiert:

$$[\alpha,\beta]:S^{p+q+1}\simeq e^{p+1}\times S^q\cup S^p\times e^{q+1}\rightarrow(X,e_X)$$
$$[\alpha,\beta](x,y)=\begin{cases}\alpha\circ\Phi(x)\,für\,(x,y)\in e^{p+1}\times S^q\\ \beta\circ\Phi(y)\,für\,(x,y)\in S^p\times e^{q+1}\\ e_X\,für\,x\in S^p\times S^q\end{cases}.$$

Das Whitehead Produkt hat folgende Eigenschaften:

(i) Das Whitehead Produkt ist antikommutativ

(ii) Das Whitehead Produkt ist bilinear

(i) Ist $(x_1, \ldots, x_{p+1}, y_{1,} \ldots, y_{q+1})$ ein Element von S^{p+q+1}, dann benötigt man p+1 Vertauschungen, um y_1 an die erste Stelle zu bringen. Insgesamt hat man so (p+1)(q+1) Vertauschungen, um das Element $(y_1, \ldots, y_{q+1}, x_{1,} \ldots, x_{p+1})$ zu erhalten. Da jede einzelne Vertauschung den Abbildungsgrad -1 hat, hat die Abbildung, die x und y vertauscht den Grad $(-1)^{(p+1)(q+1)}$. Damit erhält man

$$[\beta,\alpha]=(-1)^{(p+1)\cdot(q+1)}[\alpha,\beta]$$

(ii) Folgt aus der Definition des Whitehead Produkts

□

Die Hopf Invariante und deren Eigenschaften

Mit $(X\vee Y)$ ist die Einpunktvereinigung der beiden Räume X und Y gemeint. Es ist die Teilmenge $X\times\{e_y\}\cup\{e_x\}\times Y$ in $X\times Y$ mit e_x ist ein Basispunkt in X und e_y ist ein Basispunkt in Y.
Seien j_X und j_Y die Inklusionen von X respektive Y in $X\vee Y$ und i die Inklusion von $Y\vee X$ in $X\times Y$. Sei $\lambda:\pi_r(X\times Y)\rightarrow\pi_r(X\vee Y)$ gegeben durch $\lambda = j_X\circ p_X + j_Y\circ p_Y$. Dann gilt $p_y\circ i\circ\lambda=p_Y$ und $p_x\circ i\circ\lambda=p_x$, sodass $i\circ\lambda=id$ folgt. Damit hat die lange exakte Homotopiesequenz des Paares $(X\times Y,X\vee Y)$

$$\ldots \to \pi_{r+1}(X\times Y) \to \pi_{r+1}(X\times Y, X\vee Y) \to \pi_r(X\vee Y) \to \pi_r(X\times Y) \to \pi_r(X\times Y, X\vee Y) \to \ldots$$

eine durch λ definierte Spaltung. Man erhält so eine kurze exakte Sequenz:

$$0 \to \pi_{r+1}(X\times Y, X\vee Y) \to \pi_r(X\vee Y) \to \pi_r(X\times Y) \to 0$$

Also ist $\pi_r(X\vee Y)$ eine direkte Summe:

$$\pi_r(X\vee Y) \simeq \pi_r(X\times Y) \oplus \pi_{r+1}(X\times Y, X\vee Y) \simeq \pi_r(X\times Y) \oplus \pi_{r+1}(X\wedge Y)$$

Für die weiteren Betrachtungen setzt man X = S^n = Y. Dies liefert:

$$\pi_r(S^n\vee S^n) \simeq \pi_r(S^n\times S^n) \oplus \pi_{r+1}(S^n\wedge S^n) \simeq \pi_r(S^n\times S^n) \oplus \pi_{r+1}(S^{2n})$$

Wird nun r=2n-1 gesetzt, dann hat man:

$$\pi_{2n-1}(S^n\vee S^n) \simeq \pi_{2n-1}(S^n\times S^n) \oplus \pi_{2n}(S^{2n})$$

$\iota^1 : S^n \to S^n\vee S^n$: x → (x,e) und $\iota^2 : S^n \to S^n\vee S^n$: x → (e,x) seien die Inklusionen, wenn e ein Basispunkt der S^n ist.

Da $\delta : \pi_{2n}(S^n\wedge S^n) \simeq \pi_{2n}(S^{2n}) \to \pi_{2n-1}(S^n\vee S^n)$ [6]injektiv ist, hat man:

$$Bild(\delta) \simeq \pi_{2n}(S^{2n})$$

$Bild(\delta)$ **ist also eine unendliche zyklische Gruppe, die durch das Whitehead Produkt** $[\iota^1, \iota^2]$ **erzeugt wird.**

Ist $\alpha \in \pi_{2n-1}(S^n)$ dann gilt:

$$(\iota^1+\iota^2)\circ\alpha = \iota^1\circ\alpha + \iota^2\circ\alpha + H(\alpha)[\iota^1, \iota^2] \in \pi_{2n-1}(S^n\vee S^n)$$

Die eindeutig festgelegte ganze Zahl H(α) heißt Hopf Invariante von α.

Satz 2: Die Hopf Invariante hat folgende Eigenschaften:

(i) *Ist n ungerade, so ist H(α) = 0.*

6 Siehe George W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, 1978 Springer New York, S. 107

(ii) *Ist n gerade, so gibt es ein α mit H(α) =2*

(iii) $\beta: S^n \rightarrow S^n$ *mit* $grad(\beta) = k$ *so ist* $H(\beta \circ \alpha) = k^2 \cdot H(\alpha)$.

Beweis:

(i)
$$(\iota^1 + \iota^2) \circ \alpha - \iota^1 \circ \alpha - \iota^2 \circ \alpha = H(\alpha)[\iota^1, \iota^2]$$
$$(\iota^2 + \iota^1) \circ \alpha - \iota^2 \circ \alpha - \iota^1 \circ \alpha = H(\alpha)[\iota^2, \iota^1] = (-1)^{n^2} H(\alpha)[\iota^1, \iota^2]$$
$$\Rightarrow H(\alpha) = (-1)^{n^2} H(\alpha) \Rightarrow H(\alpha) = 0 \, f\ddot{u}r \, n \equiv 1 \mod 2$$

(ii)
$$H([\iota_n, \iota_n]) = (\iota^1 + \iota^2) \circ [\iota_n, \iota_n] - \iota^1 \circ [\iota_n, \iota_n] - \iota^2 \circ [\iota_n, \iota_n]$$
$$H([\iota_n, \iota_n]) = [\iota^1 + \iota^2, \iota^1 + \iota^2] - [\iota^1, \iota^1] - [\iota^2, \iota^2]$$
$$H([\iota_n, \iota_n]) = [\iota^1, \iota^2] + [\iota^2, \iota^1] = 2 \cdot [\iota^1, \iota^2]$$

(iii)
$$(\iota^1 + \iota^2) \circ \beta \circ \alpha - \iota^1 \circ \beta \circ \alpha - \iota^2 \circ \beta \circ \alpha = H(\beta \circ \alpha)[\iota^1, \iota^2]$$
$$\Rightarrow (k\iota^2 + k\iota^1) \circ \alpha - k\iota^1 \circ \alpha - k\iota^2 \circ \alpha = H(\alpha)[k\iota^1, k\iota^2] = k^2 H(\alpha)[\iota^1, \iota^2]$$

Die Hopf Invariante von H_μ *ist pq, falls μ den Typ (p,q) hat.*

Beweis:

Für das Whitehead Produkt $[\mu \circ i_1, \mu \circ i_2] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ gilt:

$$H([\mu \circ i_1, \mu \circ i_2]) = (\iota^1 + \iota^2) \circ [\mu \circ i_1, \mu \circ i_2] - \iota^1 \circ [\mu \circ i_1, \mu \circ i_2] - \iota^2 \circ [\mu \circ i_1, \mu \circ i_2]$$
$$H([\mu \circ i_1, \mu \circ i_2]) = (\iota^1 + \iota^2) \circ [\mu \circ i_1, \mu \circ i_2] - [\iota^1 \circ \mu \circ i_1, \iota^1 \circ \mu \circ i_2] - [\iota^2 \circ \mu \circ i_1, \iota^2 \circ \mu \circ i_2]$$
$$H([\mu \circ i_1, \mu \circ i_2]) = (\iota^1 + \iota^2) \circ [\mu \circ i_1, \mu \circ i_2] - [p \cdot \iota^1, 0 \cdot \iota^2] - [0 \cdot \iota^1, q \cdot \iota^2]$$
$$H([\mu \circ i_1, \mu \circ i_2]) = (\iota^1 + \iota^2) \circ [\mu \circ i_1, \mu \circ i_2] = [(\iota^1 + \iota^2) \circ \mu \circ i_1, (\iota^1 + \iota^2) \circ \mu \circ i_2]$$
$$H([\mu \circ i_1, \mu \circ i_2]) = [\iota^1 \circ \mu \circ i_1 + \iota^2 \circ \mu \circ i_1, \iota^1 \circ \mu \circ i_2 + \iota^2 \circ \mu \circ i_2] = [p \cdot \iota^1, q \cdot \iota^2]$$
$$H([\mu \circ i_1, \mu \circ i_2]) = p \cdot q \cdot [\iota^1, \iota^2]$$

□